Propagation of chaos in networks of FitzHugh-Nagumo neurons

Laetitia Colombani [1] & Pierre Le Bris [2]

[1] *Laboratoire de l'Institut de Mathématiques de Toulouse - Université Paul Sabatier.*
Email: laetitia.colombani@math.univ-toulouse.fr
[2] *Laboratoire Jacques-Louis Lions - Sorbonne Université.*
Email : pierre.lebris@sorbonne-universite.fr

Résumé. Nous prouvons un résultat de propagation du chaos uniforme pour les équations de FitzHugh-Nagumo, utilisées en neuroscience, sous réserve que l'interaction soit Lipschitzienne. Nous utilisons pour cela une méthode de couplage suggérée par A. Eberle (2016).
Mots-clés. FitzHugh-Nagumo, propagation du chaos, champ moyen, couplage

Abstract. We prove a result of uniform propagation of chaos for FitzHugh-Nagumo equations, used in neuroscience, provided the interaction potential is Lipschitz. We use a coupling method initially suggested by A. Eberle (2016).
Keywords. FitzHugh-Nagumo, propagation of chaos, mean field, coupling method

1 Structure du texte long

1.1 Introduction

Les neurones sont des cellules excitables, liées les unes aux autres au sein d'un immense réseau (on compte 10^11 neurones dans un cerveau humain) par des synapses. Lorsque le potentiel de membrane est assez élevé, le neurone est capable de produire une décharge et de transmettre de l'énergie aux autres neurones connectés. Comprendre le fonctionnement des neurones et déterminer leurs liens est crucial en neurobiologie.
Plusieurs modèles coexistent afin d'étudier le comportement de ces neurones, mais nous nous concentrons ici sur le modèle de FitzHugh-Nagumo.

$$\begin{cases} dX_t = (X_t - (X_t)^3 - C_t - s)dt \\ dC_t = (\gamma X_t - C_t + \beta)dt \end{cases}$$

Ce modèle consiste en deux EDS. L'une des quantités, X, représente le potentiel électrique de la membrane (ou de l'enveloppe) d'un neurone, tandis que la seconde (C) est une quantité sans réel sens biologique. Ce modèle est simple, comparé aux équations de Hodgkin-Huxley, plus précises, mais plus compliquées à étudier en raison des quatre

équations. Malgré sa simplicité, ce modèle permet d'étudier la variation du potentiel électrique, et a notamment été construit pour représenter l'oscillation de celui-ci.
Dans la littérature, ces équations ont d'abord été étudiées d'un point de vue déterministe. On peut considérer une interaction sur chacune des deux équations, l'interaction pouvant dépendre soit de l'une des deux quantités X ou C, soit des deux en même temps pour traiter le cadre le plus général possible. C'est ce dernier choix qui a été fait dans ce travail. On peut également ajouter du bruit: considérer du bruit sur la première équation permet de considérer un bruit venant des autres neurones (courant présynaptique), tandis que considérer du bruit sur la seconde équation revient à prendre en compte l'aléa de la dynamique interne du neurone. La plupart des articles ne considèrent que l'un ou l'autre de ces bruits, mais nous avons choisi de prendre en compte les deux bruits possibles afin de couvrir un cadre plus général et de voir l'importance de ces bruits.

1.2 Modèle

Nous considérons ici un réseau de N neurones en interaction, suivant les équations suivantes pour $i \in \{1, ..., N\}$

$$\begin{cases} dX_t^{i,N} = (X_t^{i,N} - (X_t^{i,N})^3 - C_t^{i,N} - s)dt + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K_X(Z_t^i - Z_t^j)dt + \sigma_x dB_t^{i,X} \\ dC_t^{i,N} = (\gamma X_t^{i,N} - C_t^{i,N} + \beta)dt + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K_C(Z_t^i - Z_t^j)dt + \sigma_c dB_t^{i,C} \\ Z_t^i = (X_t^i, C_t^i). \end{cases} \tag{1}$$

Les quantités X^i et C^i décrivent le comportement du i-ème neurone et sont dans $\mathbb{R}$. $(B_t^{i,X})_i$ et $(B_t^{i,C})_i$ sont des mouvements Browniens indépendants. K_X et K_C sont deux fonctions d'interaction qu'on suppose Lipschtzienne.

1.3 Résultats

Nous utilisons une méthode de couplage initialement décrite dans l'article de Eberle (2016) et étendue dans le récent travail de Guillin, Le Bris et Monmarché (2021) afin de montrer la propagation du chaos de ces équations. Pour ce faire, nous considérons le processus $(\bar{X}_t, \bar{C}_t)_{t\geq 0}$ suivant les équations de type McKean-Vlasov suivante

$$\begin{cases} d\bar{X}_t = (\bar{X}_t - (\bar{X}_t)^3 - \bar{C}_t - s)dt + K_X * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t)dt + \sigma_x dB_t^X \\ d\bar{C}_t = (\gamma \bar{X}_t - \bar{C}_t + \beta)dt + K_C * \bar{\mu}_t(\bar{Z}_t)dt + \sigma_c dB_t^C \\ \bar{Z}_t^i = (\bar{X}_t^i, \bar{C}_t^i) \\ \bar{\mu}_t = \mathrm{Law}((\bar{X}_t, \bar{C}_t)), \end{cases} \tag{2}$$

où $\bar{\mu}_t = \mathrm{Law}((\bar{X}_t, \bar{C}_t))$ est la loi de $(\bar{X}_t, \bar{C}_t)$.

Avec un couplage judicieux des bruits et une construction adéquate d'une fonction de Lyapunov, nous réussissons à montrer les théorèmes suivants, sous des hypothèses sur les constantes de Lipschitz de K_X et K_C:

Theorem 1.1 *[Propagation du chaos non uniforme en temps] Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ explicites, telles que pour toute mesure de probabilité μ_0 sur $\mathbb{R}^2$ avec des seconds moments finis,*

$$\mathcal{W}_1\left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k}\right) \leq C_1 e^{C_2 t} \frac{k}{\sqrt{N}},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $\mu_t^{k,N}$ est la distribution marginale au temps t des k premiers neurones $\left((X_t^1, C_t^1), ..., (X_t^k, C_t^k)\right)$ d'un système de N particules (1) avec une distribution initiale $(\mu_0)^{\otimes N}$, et où $\bar{\mu}_t$ est une solution de l'équation (2) avec la distribution initiale μ_0.

Theorem 1.2 *[Propagation du chaos uniforme en temps] Soit $\tilde{\mathcal{C}}^0 > 0$ et $\tilde{a} > 0$. Il existe une constant explicite $c^W > 0$ telle que pour tout K_X et K_C, L_X et L_C-Lipschitz avec $L_X, L_C < c^W$, et telle qu'il existe des constantes $B_1, B_2 > 0$ explicites, telles que pour toute mesure de probabilité μ_0 sur $\mathbb{R}^2$ satisfaisant $\mathbb{E}_{\mu_0}\left(e^{\tilde{a}(|X|+|C|)}\right) \leq \tilde{\mathcal{C}}^0$, on a*

$$\mathcal{W}_1\left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k}\right) \leq B_1 \frac{k}{\sqrt{N}}, \qquad \mathcal{W}_2^2\left(\mu_t^{k,N}, \bar{\mu}_t^{\otimes k}\right) \leq B_2 \frac{k}{\sqrt{N}},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $\mu_t^{k,N}$ est la distribution marginale au temps t des k premiers neurones $\left((X_t^1, C_t^1), ..., (X_t^k, C_t^k)\right)$ d'un système de N particules (1) avec une distribution initiale $(\mu_0)^{\otimes N}$, et où $\bar{\mu}_t$ est une solution de l'équation (2) avec la distribution initiale μ_0.

Bibliographie

Eberle, A. Reflection couplings and contraction rates for diffusions. *Probab. Theory Relat. Fields* 166, 851–886 (2016). https://doi.org/10.1007/s00440-015-0673-1

Guillin, A., Le Bris, P., Monmarché, P. (2021). Convergence rates for the Vlasov-Fokker-Planck equation and uniform in time propagation of chaos in non convex cases. *arXiv preprint arXiv:2105.09070.*