Comportement asymptotique de solutions d'EDS cinétiques

Emeline Luirard [1] & Mihai Gradinaru [2]

Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625
F-35000 Rennes, France
[1] *Emeline.Luirard@univ-rennes1.fr*
[2] *Mihai.Gradinaru@univ-rennes1.fr*

Résumé. On s'intéresse à un système d'équations différentielles modélisant le déplacement d'un objet soumis à une force de frottement. Lorsqu'on rajoute une force de perturbation aléatoire dans le bilan des forces, la vitesse devient solution d'une EDS. Par exemple, la trajectoire du poisson *Kuhlia Mugil* peut être modélisée par un processus de Langevin linéaire. Les questions naturelles qu'on peut se poser sont l'existence et l'éventuelle explosion de la solution et plus particulièrement le comportement en temps long du processus position. On étudie donc un système cinétique vitesse-position, où la force de frottement est à la fois non linéaire et dépendante du temps tandis que la force de perturbation est un processus de Lévy.

Mots-clés. équations différentielles stochastiques; diffusions inhomogènes; processus de Lévy; lois asymptotiques; ergodicité, tension.

1 Introduction

On étudie le modèle cinétique de dimension 1 défini, pour $t \geq t_0 > 0$, par

$$\mathrm{d}V_t = \mathrm{d}L_t - t^{-\beta}\rho\,\mathrm{sgn}(V_t)\,|V_t|^{\gamma}\,\mathrm{d}t,\ V_{t_0} = v_0 > 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{d}X_t = V_t\,\mathrm{d}t,\ X_{t_0} = x_0 \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Le bruit directeur $(L_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy, β est un nombre réel, ρ et γ sont des réels positifs. Dans la suite, on pensera L comme un mouvement brownien ou un processus α-stable.

Ce système décrit l'évolution temporelle de la vitesse et de la position d'une particule soumise à une force de frottement et à des interactions avec son environnement, modélisées par une force aléatoire. Dans le cas où la bruit directeur est brownien, on parle de processus de Langevin. Par exemple, l'article de Cattiaux et al (2010) introduit le modèle *Persistent Turning Walker*, inspiré du mouvement d'un poisson, le *Kuhlia Mugil*. Une question naturelle est de comprendre le comportement en temps long du couple de processus (V, X). Plus précisément, on s'intéresse à la limite en loi de $v_\epsilon(V_{t/\epsilon}, \epsilon X_{t/\epsilon})_t$, lorsque $\epsilon \to 0$, où v_ϵ est un taux de convergence.

Récemment, l'étude asymptotique de solution de processus de Langevin non linéaire a été l'objet de nombreux papiers, citons par exemple les articles de Cattiaux et al (2019), Eon et Gradinaru (2015), Fournier et Tardif (2020), où la dérive est supposée homogène en temps et Gradinaru et Offret (2013), lorsque la dérive dépend du temps.
Classiquement, l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}((0,\infty),\mathbb{R})$ sera muni de la topologie uniforme et l'espace des fonctions càdlàg $\mathcal{D}((0,\infty),\mathbb{R})$ de la topologie de Skorokhod.
L'équation (1) admet une unique solution forte définie jusqu'à son temps d'explosion.
On définit pour $\alpha \in (0,2) \setminus \{1\}$,

$$p(\gamma) := \begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha} & \text{si } \gamma \in [0,1), \\ \gamma & \text{si } \gamma = 1, \\ \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{2} & \text{si } \gamma \in (1,\alpha). \end{cases}$$

Lorsque $\alpha = 2$, on note, pour tout $\gamma \geq 0$, $p(\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.
Dans la suite, $\beta \geq 1 + p(\gamma) - \frac{1}{\alpha}$.

2 Estimation des moments

L'étude des moments du processus vitesse V, solution de (1), est utile pour conclure à sa non-explosion et pour contrôler certains termes qui apparaîtront dans l'analyse du comportement asymptotique du couple (V, X).

Lorsque le système (1) est dirigé par un mouvement brownien, les estimées des moments sont données par la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Pour tout $\kappa \geq 0$,*

$$\forall t \geq t_0,\ \mathbb{E}\left[|V_t|^\kappa\right] \leq C_{\gamma,\kappa,\beta,t_0} t^{\frac{\kappa}{2}}. \tag{2}$$

Dans le cas d'un bruit directeur α-stable, les estimées des moments sont les suivantes.

Proposition 2.2. *Pour tout $\alpha \in (0,2) \setminus \{1\}$ et $\kappa \in [0,\alpha)$, il existe $p_\alpha(\gamma,\kappa)$ tel que*

$$\forall t \geq t_0,\ \mathbb{E}\left[|V_t|^\kappa\right] \leq C_{\gamma,\kappa,\beta,t_0} t^{p_\alpha(\gamma,\kappa)}. \tag{3}$$

L'exposant est défini ci-dessous :
pour $\alpha \in (0,1)$,

$$p_\alpha(\gamma,\kappa) = \frac{\kappa}{\alpha};$$

pour $\alpha \in (1,2)$,

$$p_\alpha(\gamma,\kappa) = \begin{cases} \frac{\kappa}{\alpha} & \text{si } \gamma \in [0,1) \text{ et } \kappa \in [0,1], \\ \frac{3\kappa}{2\alpha} & \text{si } \gamma \in [0,1) \text{ et } \kappa \in (1,\alpha), \\ \kappa & \text{si } \gamma \geq 1 \text{ et } \kappa \in [0,1], \\ \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{\alpha} & \text{si } \gamma \geq 1 \text{ et } \kappa \in (1,\alpha). \end{cases}$$

Exemple 2.1. Dans le cas linéaire ($\gamma = 1$), il est possible de calculer explicitement le processus V. En effet, si $\beta > 1$, alors pour tout $t \geq t_0$,

$$V_t = v_0 + e^{-\rho \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}} \int_{t_0}^{t} e^{\rho \frac{s^{1-\beta}}{1-\beta}} \, \mathrm{d}L_s$$

est solution de (1).
A la suite d'une intégration par parties, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[|V_t|\right] \leq C_{t_0} \left(t^{\frac{1}{\alpha}} + t^{1-\beta+\frac{1}{\alpha}} \right) \leq C_{t_0} t^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Jensen, pour $\kappa \in [0,1]$, on a $p_\alpha(1,\kappa) = \frac{\kappa}{\alpha}$.

Remarque 2.3. *Lorsque la force de frottement est nulle, i.e. $\rho = 0$, le processus vitesse se réduit au bruit directeur. Dans ce cas les moments sont donnés, pour $\alpha \in (0,2] \setminus \{1\}$ et $\kappa \in [0,\alpha)$ ($\kappa \geq 0$ si $\alpha = 2$), par*

$$\forall t \geq 0, \ \mathbb{E}\left[|V_t|^\kappa\right] = C t^{\frac{\kappa}{\alpha}}.$$

3 Comportements asymptotiques

Les convergences ont lieu dans l'espace $\mathcal{C}((0,\infty))$, $\mathcal{D}((0,\infty))$ lorsque le bruit directeur est respectivement brownien et α-stable.
En temps long, deux régimes sont observés en fonction de la position des coefficients β et γ par rapport à α. Si $\beta > 1 + p(\gamma) - \frac{1}{\alpha}$, c'est le bruit directeur qui a le plus de poids en l'infini. On a alors convergence vers la diffusion de Kolmogorov $(\mathcal{S}, \int \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ a la même loi que le bruit directeur.

Théorème 3.1. *Supposons $\gamma \in (1 - \frac{\alpha}{2}, \alpha)$ et $\beta \geq 0$. On suppose que $\beta > 1 + p(\gamma) - \frac{1}{\alpha}$. Soit $(V_t, X_t)_{t \geq t_0}$ une solution de (1).*
Alors, lorsque $\epsilon \to 0$,

$$(\epsilon^{1/\alpha} V_{t/\epsilon}, \epsilon^{1+1/\alpha} X_{t/\epsilon})_{t \geq \epsilon t_0} \Longrightarrow \left(\mathcal{S}_t, \int_0^t \mathcal{S}_s \, \mathrm{d}s \right)_{t>0}, \tag{4}$$

où $(\mathcal{S}_t)_{t \geq 0}$ est un processus α-stable.

Le cas $\beta = 1 + \frac{\gamma - 1}{\alpha}$ est critique : les deux termes de l'équation différentielle stochastique se compensent en temps long. On retrouve une convergence vers un processus limite cinétique de la forme $(\mathcal{V}, \int \mathcal{V})$. Cependant, le processus $\mathcal{V}$ n'est plus le bruit directeur mais le processus image d'un processus ergodique, solution d'une EDS homogène en temps.

Théorème 3.2. *Supposons $\gamma \in (1-\frac{\alpha}{2}, \alpha)$ et $\beta = 1 + \frac{\gamma-1}{\alpha}$. Soit $(V_t, X_t)_{t\geq t_0}$ une solution de (1). On note $\tilde{H}$ le processus ergodique solution de l'EDS*

$$\mathrm{d}H_s = \mathrm{d}R_s - \frac{H_s}{\alpha}\,\mathrm{d}s - F\big(H_s\big)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

avec pour condition initiale sa mesure invariante et où $(R_t)_{t\geq 0}$ est un processus α-stable. On note $\Lambda_{F,t_1,\cdots,t_d}$ ses lois finies-dimensionnelles. Soit $(\mathcal{V}_t)_{t\geq 0}$ le processus ayant pour lois finies-dimensionnelles la mesure image de $\Lambda_{F,\log(t_1/t_0),\cdots,\log(t_d/t_0)}$ par l'application linéaire $T: u := (u_1, \cdots, u_d) \mapsto (t_1^{1/\alpha}u_1, \cdots, t_d^{1/\alpha}u_d)$.
Alors, quand $\epsilon \to 0$,

$$(\epsilon^{1/\alpha}V_{t/\epsilon}, \epsilon^{1+1/\alpha}X_{t/\epsilon})_{t\geq \epsilon t_0} \overset{f.d.d.}{\Longrightarrow} \left(\mathcal{V}_t, \int_0^t \mathcal{V}_s\,\mathrm{d}s\right)_{t>0}. \tag{6}$$

Il y a convergence en tant que processus si $\alpha = 2$ ou $\gamma < 1$.

Bibliographie

Cattiaux, P., Chafai, D. and Motsch, S. (2010). Asymptotic analysis and diffusion limit of the Persistent Turning Walker Model, *Asymptotic Analysis*, 67(1–2):17–31.

Cattiaux, P., Nasreddine, E. and Puel, M. (2019). Diffusion limit for kinetic Fokker-Planck equation with heavy tails equilibria: The critical case, *Kinetic & Related Models*, 12(4):727.

Eon, R. and Gradinaru, M. (2015). Gaussian asymptotics for a non-linear Langevin type equation driven by an α-stable Lévy noise, *Electronic Journal of Probability*, 20.

Fournier, N. and Tardif, C. (2020). One dimensional critical Kinetic Fokker-Planck equations, Bessel and stable processes, *Ann. Probab.,* 48, 2359-2403.

Gradinaru, M. and Offret, Y. (2013). Existence and asymptotic behaviour of some time-inhomogeneous diffusions, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 49(1):182–207.