Un réseau de neurones en interaction avec inhibition : analyse théorique et simulation parfaite

Branda Goncalves [1]

[1] *LPTM, 2 avenue Adolphe-Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise, France*
CY Cergy Paris Université.
E-mail: branda.goncalves@cyu.fr

Résumé. Nous étudions un modèle de réseau de neurones purement inhibiteur où les neurones sont représentés par leur état d'inhibition. L'étude que nous présentons ici est partiellement basée sur les travaux de Cottrell [1] et Fricker et al.[2] où le taux de spike d'un neurone ne dépend que de son état d'inhibition. Nous trouvons une condition locale de Doeblin qui implique l'existence d'une mesure invariante pour le processus. Enfin, nous étendons notre modèle au cas où les neurones sont indexés par $\mathbb{Z}$. Dans le cas de ce système infini, on s'appuie sur un algorithme de simulation parfaite pour montrer la récurrence du processus.

Mots clés. taux de spike, neurones en interaction, algorithme de simulation parfaite, technique classique de contour. ...

1 Le modèle

Considérons que nous avons N neurones qui sont en relation les uns avec les autres. Pour tous les $i \in \{1, \cdots, N\}$, $X_t^{i,N}$ décrit l'état d'inhibition du neurone i au temps t et $W_{i\to j}$ le poids de i sur j. Lorsque le neurone $i \in \{1, \cdots, N\}$ spike,

- L'état actuel d'inhibition du neurone i est remplacé par Y^i qui a pour distribution F^i indépendamment de toute autre chose.

- L'état d'inhibition de tout neurone $j \neq i$ est augmenté de $W_{i\to j} > 0$ au temps t.

Entre les sauts successifs du système, chaque neurone i suit la dynamique déterministe

$$\dot{x}_t^i = -\alpha_i\left(x_t^i\right), \; x_0^i = x^i,$$

avec $\alpha_i\left(x^i\right)$ continu sur $(0, \infty)$, positive sur $(0, \infty)$ et non négative sur $[0, \infty)$. Soit $\beta_i\left(x^i\right)$ une fonction de taux continue positive et décroissante sur $[0, \infty)$. On prend β_i décroissante de sorte que, plus x_t^i est grand, plus sa probabilité de spiker est faible et plus x_t^i est petit, plus sa probabilité de spiker est élevée.

Nous sommes donc amenés à considérer le processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP) $X_t^N = (X_t^{1,N}, \cdots, X_t^{N,N}) \in \mathbb{R}_+^N$. Pour $i \in \{1, \cdots, N\}$, la dynamique de $X_t^{i,N}$ est donnée par :

$$dX_t^{i,N} = -\alpha_i \left(X_{t-}^{i,N} \right) dt + \int_0^\infty \int_0^\infty (y^i - X_{t-}^{i,N}) \mathbf{1}_{\left\{ r \leq \beta_i \left(X_{t-}^{i,N} \right) \right\}} M^i \left(dt, dr, dy^i \right)$$
$$+ \sum_{j \neq i} W_{j \to i} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{\left\{ r \leq \beta_j \left(X_{t-}^{j,N} \right) \right\}} M^j \left(dt, dr, dy^j \right), \quad (1)$$

où M^i est une mesure de Poisson aléatoire d'intensité $dtdrF^i(dy)$ et pour tout i, les M^i sont tous indépendants.

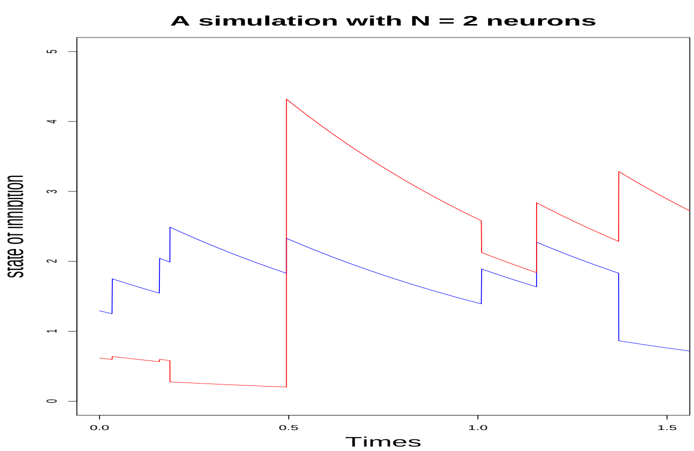
Le générateur infinitésimal associé à ce modèle est donné par:

$$G^N V(x) = -\sum_{i=1}^N \alpha_i(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} V(x) + \sum_{i=1}^N \beta_i(x^i) \int_0^\infty F^i(dy^i) [V(x + e^i y^i - e^i x^i + \sum_{j \neq i} e^j W_{i \to j}) - V(x)]$$

où V est une fonction lisse et e^i est le $i-$ième vecteur unitaire.

En d'autres termes, à chaque saut du processus, un seul neurone fait un spike. Si c'est le neurone i, alors son état est remplacé par Y^i et tous les autres neurones reçoivent le poids d'inhibition $W_{i \to j} \geq 0$ pour tout $j \neq i$.

Simulation. Nous simulons une trajectoire typique de $X_t^{N,i}$ avec $N = 2$ neurones en utilisant l'algorithme d'acceptation rejet.



2 Condition de Doeblin locale

Dans cette section, nous voulons montrer l'existence d'une mesure de probabilité invariante du processus.

Soient $S_0 < S_1 < \cdots < S_n < \cdots$ les instants des sauts successifs des N neurones. Il est évident que la chaîne extraite $Z_n := X_{S_n}$ est une chaîne de Markov.

Theorem 1 *Supposons que pour tout $1 \leq i \leq N$, $\alpha_i \in \mathcal{C}^1$ et qu'il existe un ensemble compact $K \subset]0, \infty[^N$ tel que pour tout $x \in K$, pour tout $1 \leq i \leq N$, $\beta_i(x^i + \sum_{j=1}^{i-1} W_{j \to i}) > 0$. De plus, on suppose que $F^i(dy)$ est absolument continu et que $\|\beta_i\|_\infty < \infty$ pour tout i. Alors il existe $d \in (0,1)$ et une mesure de probabilité ν sur $(\mathbb{R}_+^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^N))$, telle que*

$$Q^N(x, dy) \geq d 1_K(x) \nu(dy)$$

où Q est l'opérateur de transition de la chaîne extraite $Z_n = X_{S_n}$ et Q^N est son $N-$ième itéré.

Corollary 2 *Si pour tout $i \leq N$, β_i est strictement inférieur et borné, alors le processus est récurrent.*

Remark 1 *Lorsque β_i est strictement minoré et borné, on peut remarquer que la borne inférieure obtenue dans le théorème 1 tient sur l'espace d'état entier $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire sans 1_K. Ceci nous permet d'avoir la borne inférieure globale $Q^N(x, dy) \geq d\nu(dy)$ et donc l'ergodicité uniforme du processus.*

3 Simulation parfaite

Dans cette section, nous considérons un système avec une infinité de neurones indexés par $\mathbb{Z}$. On veut construire un algorithme de simulation parfaite pour montrer la récurrence de notre processus sous certaines conditions. Nous supposons que pour tout i le taux de saut $\beta_i(x^i)$ est borné.

On fixe un neurone i dans $\mathbb{Z}$, on s' intéresse à l'état du neurone i au temps 0 dans le régime stationnaire, c'est-à-dire en supposant que le processus démarre à partir de $-\infty$. Pour ce faire, nous explorons le passé afin de déterminer tous les couples d'indices et de temps qui affectent la valeur du neurone i au temps 0. L'ensemble de tous ces couples (j, s) sera appelé le clan des ancêtres du neurone i comme dans Galves et Löcherbach [3] et Galves et al. [4]. Le clan des ancêtres est un processus qui évolue dans le temps par sauts successifs. On commence avec $C_0^i = \{i\}$.

En posant $T_{stop}^i = \inf\{t : C_t^i = \emptyset\}$ le premier instant où le clan des ancêtres du neurone i est vide, $d_j = \min_{x^j} \beta_j(x^j)$ et $d^j = \max_{x^j} \beta_j(x^j)$, on a la proposition suivante:

Proposition 3 *Soit $b_j = \sum_{k \to j}(d^k - d_k)$. Si $b_j < d_j$ pour tout j alors T_{stop}^i est fini presque surement i.e. le processus est sous-critique.*

Proof. Nous allons construire un processus Z_n tel que pour tout n, $|C^i_{T_n}| \leq Z_n$ et tel que Z_n évolue de la manière suivante : avec la probabilité $\frac{\sum_{j\in Z_n} d_j}{\sum_{j\in Z_n}(b_j+d_j)}$ on a $Z_{n+1} = Z_n - 1$ et avec la probabilité $\frac{\sum_{j\in Z_n} b_j}{\sum_{j\in Z_n}(b_j+d_j)}$ on a $Z_{n+1} = Z_n + 1$. ■

Definition 1 *Pour tout couple $(i,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$, C^i_t est un processus Markovien de saut prenant des valeurs dans le sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$ et son générateur infinitésimal est donné par*

$$A^{clan}g(C) = \sum_{j\in C} d_j[g(C \setminus \{j\}) - g(C)] + \sum_{j\in\partial_{ext}(C)} (d^j - d_j)[g(C \cup \{j\}) - g(C)]$$

où g est une fonction test.

Le théorème suivant donne des conditions sur la finitude du temps d'extinction du processus.

Theorem 4 *On définit $\delta = \frac{d_j}{d^j - d_j}$. Il existe une valeur critique $0 < \delta_c < \infty$ telle que :*

- *si $\delta > \delta_c$, alors le temps d'extinction est fini presque sûrement c'est à dire, $\mathbb{P}(\forall i,\ T^i_{stop} < \infty) = 1$.*
- *si $\delta < \delta_c$, alors le temps d'extinction est infini avec une probabilité positive c'est-à-dire, $\mathbb{P}(\forall i,\ T^i_{stop} = \infty) > 0$.*

References

[1] Cottrell, M.: Mathematical analysis of a neural network with inhibitory coupling. *Stochastic Processes and their Applications* 40 (1992) 103-126

[2] Fricker C., Robert P., Saada E., Tibi D. (1993) Analysis of a Network Model. *Cellular Automata and Cooperative Systems*. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), vol 396. Springer, Dordrecht.

[3] Galves, A. and Löcherbach, E. (2013). Infinite systems of interacting chains with memory of variable length - a stochastic model for biological neural nets. *Journal of Statistical Physics* 151 896–921.

[4] Galves, A., Löcherbach, E., Orlandi, E.: Perfect simulation of infinite range Gibbs measures and coupling with their finite range approximations. *J Stat Phys* DOI 10.1007/s10955-009-9881-3 (2009)