

OPTIMISATION DISCRÈTE ROBUSTE EN PRÉSENCE D'INCERTITUDE ELLIPSOÏDALE

Chifaa Dahik ¹

¹ 16 route de Gray, 25000 Besançon, chifaa.dahik@univ-fcomte.fr

Résumé. On s'intéresse à la version robuste des problèmes linéaires à variables binaires avec un ensemble d'incertitude ellipsoïdal corrélé. Puisque ce problème est NP-difficile, une approche heuristique intitulée DFW et basée sur l'algorithme de Frank-Wolfe est proposée. Dans cette approche, nous examinons la puissance d'exploration des itérations internes binaires de la méthode. Pour les problèmes de petites tailles, la méthode est capable de fournir la solution optimale fournie par CPLEX, après quelques centaines d'itérations. De plus, contrairement à la méthode exacte, notre approche s'applique à des problèmes de grandes tailles également. Les résultats numériques ont été appliqués au plus court chemin robuste. Un autre objectif est de proposer une relaxation semi-définie positive (SDP) pour le plus court chemin robuste qui fournit une borne inférieure pour valider des approches telles que l'algorithme DFW. Le problème relaxé est le résultat d'une bidualisation du problème. Puis le problème relaxé est résolu en utilisant une version creuse d'une méthode de décomposition dans un espace produit. Cette méthode de validation est adaptée aux problèmes de grande taille. Finalement, une autre adaptation de l'algorithme de Frank-Wolfe a été réalisé pour le problème du k -médiane, accompagnée d'un algorithme d'arrondissement qui satisfait les contraintes.

Mots-clés. Incertitude, Optimisation robuste discrète, Plus court chemin robuste, Clustering robuste, relaxation SDP, ...

Abstract. We address the Robust counterpart of binary linear problems with ellipsoidal uncertainty sets. Since this problem is hard, a heuristic approach, based on Frank-Wolfe's algorithm named Discrete Frank-Wolf (DFW), has been proposed. In this approach, we make use of the exploration power of the integer inner iterates of the method. For small dimensional instances, our method is able to provide the same optimal integer solution as an exact method provided by CPLEX, after no more than a few hundred iterations. Moreover, as opposed to the exact method, DFW Algorithm applies to large scale problems as well. The numerical results are applied on the robust shortest path problem (RSPP). Another aim of this thesis is to propose a Semi-Definite Programming (SDP) relaxation for the RSPP that provides a lower bound to validate approaches such as DFW Algorithm. The relaxed problem results from a bidualization of the problem. Then the relaxed problem is solved using a sparse version of a decomposition in a product space method. This validation method is suitable for large size problems. The numerical experiments show that the gap between the solutions obtained with the relaxed and the heuristic approaches is relatively small. Finally, another adaptation of FW, named MFW

Algorithm, has been proposed and tested numerically for the k -median problem with a feasible rounding procedure.

Keywords. Uncertainty, Robust discrete optimization, Ellipsoidal uncertainty set, Robust shortest path Problem, Robust clustering, SDP relaxation, ...

1 Optimisation robuste sous incertitude ellipsoïdale

1.1 Contexte

Dans tous les secteurs, qu'ils soient industriels ou non, des décisions doivent être prises en lien avec un objectif qu'il s'agit d'optimiser. Ainsi en logistique, des livraisons doivent se faire avec le moins de véhicules et le moins de kilomètres possibles ; dans l'industrie des tâches doivent être traitées au plus vite par des machines dans un ordre approprié, etc. Si l'homme a souvent été celui qui optimise, cela n'est plus possible dès que le problème est de grande taille. Les solutions sont souvent valides mais arbitrairement loin de la solution optimale. Une littérature importante traite des problèmes d'optimisation. Ainsi pour les problèmes de tournées ou les problèmes d'ordonnancement évoqués plus haut, de nombreuses approches ont été étudiées. Un enjeu pour la prise de décision basée sur la résolution d'un problème d'optimisation est la pérennité de cette décision. Qu'advient-il si la route prise par une tournée supporte un trafic plus dense que prévu ? Si nous l'avions su avant, cette route aurait été évitée. De même, comment faire si une machine est retardée dans l'accomplissement d'une tâche ? Le retard ne pourra pas être rattrapé. Ainsi, mieux que de proposer une solution optimale à un problème donné, si tant est qu'il soit possible de la calculer dans un temps raisonnable, il conviendrait de trouver une solution qui soit bonne, à une faible distance de la solution optimale, et qui reste bonne même si le contexte du problème change : une route a un trafic plus dense, la durée d'une tâche est plus longue que prévu. Aujourd'hui, étant donné l'omniprésence des problèmes d'optimisation, il devient indispensable de prendre en compte le caractère incertain des données qui paramètrent le problème étudié. On parle alors d'optimisation robuste. Le but de cette thèse est d'identifier, en fonction des problèmes d'optimisation et de la nature des données à prendre en compte, la manière de rendre robuste une solution.

1.2 Un algorithme heuristique basé sur l'algorithme de Frank-Wolfe appliqué sur le plus court chemin robuste

On s'intéresse à la version robuste des problèmes linéaires à variables binaires avec un ensemble d'incertitude corrélé. Puisque ce problème est NP-difficile, une approche heuristique intitulée DFW et basée sur l'algorithme de Frank-Wolfe est proposée. Dans cette approche, nous examinons la puissance d'exploration des itérations internes binaires de

la méthode. Pour les problèmes de petites tailles, la méthode est capable de fournir la solution optimale fournie par CPLEX, après quelques centaines d'itérations. De plus, contrairement à la méthode exacte, notre approche s'applique à des problèmes de grandes tailles également. Les résultats numériques ont été appliqués au plus court chemin robuste, et l'approche proposée vise d'autres applications, telles que le clustering robuste.

1.3 Méthode de validation de l'algorithme heuristique par borne inférieure

On s'intéresse ensuite à proposer une relaxation semi-définie positive (SDP) pour le plus court chemin robuste qui fournit une borne inférieure pour valider les approches telles que DFW. Le problème relaxé résulte d'une bidualisation qui se fait par une reformulation du plus court chemin robuste en un problème quadratique. Puis le problème relaxé est résolu en utilisant une version creuse d'une méthode de décomposition dans un espace produit. Cette méthode de validation est adaptée aux problèmes de grande taille. Les expériences numériques montrent que l'écart entre les solutions obtenues par l'approche relaxée et l'approche heuristique est relativement faible.

1.4 Un autre algorithme heuristique basé sur l'algorithme de Frank-Wolfe pour le problème de clustering robuste

Enfin, on s'intéresse à une extension de l'étude sur la version robuste du k -médiane clustering avec un ensemble d'incertitude ellipsoïdal. On propose un algorithme adapté de Frank-Wolfe, où on s'intéresse à la moyenne des solutions intermédiaires. Cet algorithme est accompagnée d'un algorithme d'arrondissement qui satisfait les contraintes.

Bibliographie

Buchheim, Christoph, and Jannis Kurtz. Robust combinatorial optimization under convex and discrete cost uncertainty. *EURO Journal on Computational Optimization* 6, no. 3 (2018): 211-238.

Al Dahik, Chifaa, Zeina Al Masry, Stéphane Chrétien, Jean-Marc Nicod, and Landy Rabehasaina. A frank-wolfe based algorithm for robust discrete optimization under uncertainty. In *2020 Prognostics and Health Management Conference (PHM-Besanon)*, pp. 247-252. IEEE, 2020.

Dahik, Chifaa Al, Zeina Al Masry, Stéphane Chrétien, Jean-Marc Nicod, and Landy Rabehasaina. An SDP dual relaxation for the Robust Shortest Path Problem with ellipsoidal uncertainty: Pierra's decomposition method and a new primal Frank-Wolfe-type heuristics for duality gap evaluation. *arXiv preprint arXiv:2110.15653* (2021).

Lemaréchal, Claude. Lagrangian relaxation. In Computational combinatorial optimization, pp. 112-156. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.

Pierra, Guy. Decomposition through formalization in a product space. Mathematical Programming 28, no. 1 (1984): 96-115.