UN MODÈLE RÉGULIER APPROCHANT UN MODÈLE DE RUPTURE

SERGUEI DACHIAN
ARIJ AMIRI (INTERVENANTE)

Mots clés : Processus de Poisson, estimateur du maximum de vraisemblance, estimateurs bayesiens, modèle de rupture, modèle régulier, méthode d'analyse de rapport de vraisemblance, topologies de Skorokhod.

Résumé : On s'intéresse à l'estimation de la position de ce qu'on appelle "rupture lisse" ("smooth change-point") à partir de $n \in \mathbb{N}^*$ observations indépendantes d'un processus de Poisson non-homogène. Plus précisément, soient $0 < \alpha < \beta < \tau$ des constantes et ψ une fonction continue et strictement croissante sur $[0, \tau]$. Soit $r > -\min_{0 \leq t \leq \tau} \psi(t)$ une constante et $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante vers 0. Soit $\theta \in \Theta = (\alpha, \beta)$ un paramètre inconnu que nous cherchons à l'estimer quand $n \to +\infty$. On observe $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$, où $X_j = \bigl(X_j(t),\ 0 \leq t \leq \tau\bigr)$, $j = 1, \ldots, n$, des processus de Poisson indépendants sur $[0, \tau]$ de fonction d'intensité $\lambda_\theta = \lambda_\theta^{(n)}$, $\theta \in \Theta$, donnée par :

$$\lambda_\theta^{(n)}(t) = \psi(t) + \frac{r}{\delta_n}\,(t - \theta)\,\mathbb{1}_{[\theta, \theta+\delta_n[}(t) + r\,\mathbb{1}_{[\theta+\delta_n, \tau]}(t), \qquad 0 \leq t \leq \tau.$$

Cette fonction d'intensité, dans le cas particulier $\psi \equiv \lambda_0 > 0$, est donnée par la Figure 1.

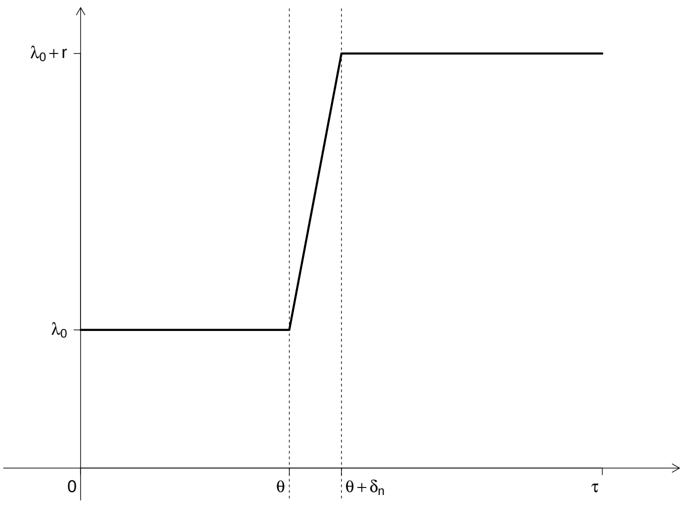

FIGURE 1. fonction d'intensitté $\lambda_\theta^{(n)}$ quand $\psi \equiv \lambda_0$

On note $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\theta^{(n)}$ la mesure de probabilité correspondant à $X^{(n)}$. La vraisemblance, par rapport à la mesure $\mathbf{P}_* = \mathbf{P}_*^{(n)}$ correspondant à n processus de Poisson non-homogène indépendant avec une fonction d'intensité identiquement égale à 1 (*cf.*, par exemple, [7]) est donnée par

$$\begin{aligned} L\big(\theta, X^{(n)}\big) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta\big(X^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}_*} \\ &= \exp\left\{\sum_{j=1}^n \int_0^\tau \ln\big(\lambda_\theta(t)\big)\,\mathrm{d}X_j(t) - n\int_0^\tau \big(\lambda_\theta(t) - 1\big)\,\mathrm{d}t\right\}, \qquad \theta \in \Theta. \end{aligned}$$

Comme estimateur du paramètre inconnu θ, nous considérons l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et les estimateurs bayesiens (EB). L'EMV $\hat\theta_n$ est donné par

$$\hat\theta_n = \operatorname*{argsup}_{\theta\in\Theta} L\big(\theta, X^{(n)}\big),$$

et l'EB $\tilde\theta_n$ pour le fonction de perte quadratique et la densité a priori q est donné par

$$\tilde\theta_n = \frac{\int_\alpha^\beta \theta\, q(\theta)\, L\big(\theta, X^{(n)}\big)\,\mathrm{d}\theta}{\int_\alpha^\beta q(\theta)\, L\big(\theta, X^{(n)}\big)\,\mathrm{d}\theta}\,.$$

Nous montrons que le comportement de l'EMV et des EB de θ dépend de la vitesse de convergence de δ_n vers zéro. Plus précisément, nous distinguons deux cas :

— le cas lent : $n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$;

— le cas rapide : $n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Nous montrons que dans le cas lent, le modèle est LAN (localement asymptotiquement normal) avec une vitesse non standard $\sqrt{\delta_n/n}$, et l'estimateur du maximum de vraisemblance et les estimateurs bayesiens sont consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces.

Nous montrons également que dans le cas rapide, le modèle est non régulier et se comporte comme un modèle de rupture classique. Plus précisément, dans ce cas nous montrons que les estimateurs bayesiens sont consistants, convergent avec une vitesse $1/n$ vers des limites non-gausiennes différentes, et sont asymptotiquement efficaces.

Tous ces résultats sont obtenus en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance développée par Ibragimov et Khasminskii dans [3] qui permet également d'obtenir la convergence des moments de ces estimateurs. Cette méthode consiste, dans un premier temps, à étudier le rapport de vraisemblance normalisé

$$\begin{aligned} Z_n(u) = Z_n^{(\theta)}(u) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\theta+u\varphi_n}\big(X^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta} = \frac{L\big(\theta+u\varphi_n, X^{(n)}\big)}{L\big(\theta, X^{(n)}\big)} \\ &= \exp\left\{\sum_{j=1}^n \int_0^\tau \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t)}{\lambda_\theta(t)}\right)\mathrm{d}X_j(t) - n\int_0^\tau \big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}(t) - \lambda_\theta(t)\big)\,\mathrm{d}t\right\}, \qquad u \in \mathbb{U}_n, \end{aligned}$$

où $\mathbb{U}_n = \left]\varphi_n^{-1}(\alpha-\theta), \varphi_n^{-1}(\beta-\theta)\right[$ et φ_n une suite décroissante vers 0, dite vitesse de normalisation de la vraisemblance.

Une étape clé dans la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance est la convergence faible de Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, vers un certain processus limite $Z = Z^{(\theta)}$ (dit rapport de vraisemblance limite). Notons que, comme $\mathbb{U}_n \uparrow \mathbb{R}$, le rapport de vraisemblance limite doit être défini sur tout $\mathbb{R}$. Par conséquent, les rapports de vraisemblance normalisé Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ont aussi besoin d'être prolongé sur $\mathbb{R}$. Comme les valeurs de u tels que $|u|$ est grand correspondent aux valeurs de paramètre $\theta + u\varphi_n$ éloignées de la vraie valeur θ, il est naturel que $Z_n(u)$ soit petit pour ces valeurs de u. On prolonge donc les Z_n sur $\mathbb{R}$ (en les gardant continues ou càdlàg selon les cas) de sorte qu'ils soient nulles en $\pm\infty$ et on travaille ainsi soit dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en $\pm\infty$, qu'on le note $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, soit dans l'espace des fonctions cadlàg sur $\mathbb{R}$ nulles en $\pm\infty$, qu'on le note $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$.

Notons qu'à notre connaissance, jusqu'à présent la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance a toujours été appliquée soit en utilisant l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ muni la topologie uniforme, soit en utilisant l'espace l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle de Skorokhod (introduite dans [8]). Or, dans certaines situations (notamment, dans le cas rapide de notre modèle de rupture lisse), la convergence de Z_n vers Z ne peut avoir lieu sous aucune de ces deux topologies puisque Z_n est à trajectoires continus et Z est à trajectoires discontinus. Nous avons donc besoin d'adapter la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance pour utiliser une autre topologie (plus faible que la topologie usuelle de Skorokhod) permettant la convergence des fonctions continues vers des limites discontinues (qui n'est pas possible sous la topologie usuelle de Skorokhod) et telle que la fonctionnelle sup soit continue pour cette topologie (afin de pouvoir étudier l'EMV).

Notons enfin que l'étude des EBs et de l'EMV dans le cas lent, ainsi que l'étude des EBs dans le cas rapide, sont publiés dans l'article [1]. L'étude de l'EMV dans le cas rapide va être publié dans un prochain article.

References

[1] Arij Amiri and Sergueï Dachian. On smooth change-point location estimation for Poisson processes. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 24(3):499–524, 2021.

[2] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999.

[3] Ildar A. Ibragimov and Rafail Z. Khasminskii. *Statistical estimation. Asymptotic theory*, volume 16 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Translated from Russian edition of 1979.

[4] Yury A. Kutoyants. Intensity parameter estimation of an inhomogeneous Poisson process. *Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform.*, 8(2):137–149, 1979.

[5] Yury A. Kutoyants. *Parameter estimation for stochastic processes*, volume 6 of *Research and Exposition in Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, 1984. Translated from Russian edition of 1980.

[6] Yury A. Kutoyants. *Statistical inference for spatial Poisson processes*, volume 134 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[7] Robert S. Liptser and Albert N. Shiryaev. *Statistics of random processes. II. Applications*, volume 6 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 2nd expanded edition, 2001.

[8] Anatolii V. Skorohod. Limit theorems for stochastic processes. *Theory Probab. Appl.*, 1(3):261–290, 1956.

[9] Ward Whitt. *Stochastic-process limits.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2002. An introduction to stochastic-process limits and their application to queues.