Propagation du chaos dans les champs moyens à répliques en temps discret et applications aux populations de neurones

Michel Davydov [1] & François Baccelli [2] & Thibaud Taillefumier [3]

[1] *Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm 75005 Paris et INRIA Paris, 2 Rue Simone Iff, 75012 Paris, michel.davydov@inria.fr*
[2] *Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm 75005 Paris et INRIA Paris, 2 Rue Simone Iff, 75012 Paris, francois.baccelli@ens.fr*
[3] *UT Austin, Austin, Texas 78712, États-Unis, ttaillef@austin.utexas.edu*

Résumé. Pour modéliser des computations résultant de myriades d'interactions neuronales, des réseaux de neurones déchargeants sont communément utilisés. Malheureusement, la plupart des dynamiques d'intéret impliquent des graphes d'interaction complexes pour lesquels un traitement computationnel exact est impossible. Pour contourner cette difficulté, l'approche des champs moyens à répliques implique des copies des réseaux d'intéret qui interagissent aléatoirement. Cette approche évite l'échelonnage sur le nombre de neurones et préserve la géométrie du modèle. Dans la limite du nombre infini de répliques, nous montrons pour une large classe de processus en temps discret, que nous appelons processus d'interaction-agrégation-fragmentation, la validité de l'hypothèse poissonnienne. Celle-ci postule que les répliques deviennent asymptotiquement indépendantes et que les arrivées à un neurone deviennent asymptotiquement poissonniennes.

Mots-clés. Processus ponctuel, champs moyens, processus de Hawkes, processus de Markov, modèle à répliques, réseau de neurones, propagation du chaos, hypothèse poissonnienne

1 Description de la communication

1.1 Motivation

Des phénomènes aussi variés que la propagation des épidémies, les dynamiques d'opinion, le contrôle des flux sur internet ou même les calculs neuronaux peuvent être modélisés comme des interactions ponctuelles entre agents interconnectés. Les phénomènes d'intérêt dans toutes ces situations sont alors vus comme des dynamiques de réseau sur un graphe d'agents qui interagissent via des processus ponctuels : les arêtes du graphe sont le support des interactions, et des processus ponctuels associés à chaque noeud enregistrent les temps auxquels ces interactions se produisent. Ce cadre très général de dynamiques de réseaux fournit une classe de modèles très versatiles pouvant servir aussi bien dans les sciences de la vie qu'en ingénieurie ou en économie. Cependant, cette versatilité a un coût : la complexité des interactions rend l'analyse mathématique directe de ces modèles impossible excepté pour les architectures de réseau les plus simples.

Aussi, pour compléter la simulation numérique, il est nécéssaire d'effectuer des hypothèses simplificatrices pour obtenir des modèles tractables. Dans cet esprit, la simplification la plus courante est le modèle de champ moyen : il s'agit de considérer que les interactions reçues par un agent donné du réseau peuvent s'exprimer comme une moyenne empirique de l'ensemble des interactions du réseau, voir par exemple Sznitman (1989). Dans ce cas de figure, on étudie le modèle obtenu à la limite en faisant tendre le nombre d'agents vers l'infini, en supposant donc que les interactions sont donc nécéssairement d'ordre $\frac{1}{K}$, où K représente le nombre d'agents. Cette simplification ne préserve donc ni la géométrie du réseau initial, ni les corrélations dues à la taille finie du réseau, qui peuvent se révéler importantes dans certaines applications, comme par exemple en neurosciences.

Pour pallier ce problème, nous étudions une autre classe de modèles de champ moyen intialement apparus dans certains modèles de télécommunications introduits par Vvendenskaya et Dobrushin (1996) et inspirés de la physique statistique, les champs moyens à répliques. Dans ceux-ci, au lieu d'échelonner par rapport au nombre d'agents, nous considérons M copies du réseau initial, que nous appellons répliques. Les interactions subissent alors un routage uniforme entre les répliques de la manière suivante : si l'agent i devait interagir avec l'agent j au sein de la réplique n, à la place une réplique est choisie uniformément et indépendamment sur $\{1, \dots, M\} \setminus \{n\}$ et l'agent i de la réplique initiale interagit avec l'agent j de la nouvelle réplique ainsi choisie. Dans l'objectif d'avoir un modèle tractable, on s'intéresse alors à la limite lorsque le nombre M de répliques tend vers l'infini.

Dans Baccelli (2019), un tel modèle à répliques est étudié dans le cadre d'une dynamique de neurones dite de Galves-Löcherbach (2015), modèle classique en neurosciences. Il fut conjecturé que, dans la limite du champ moyen à répliques lorsque le nombre de répliques tend vers l'infini, les répliques deviennent asymptotiquement indépendantes (propagation du chaos) et le processus ponctuel des arrivées à un agent donné converge vers un processus de Poisson (hypothèse poissonnienne). Sous cette conjecture, il fut montré que l'on pouvait obtenir des formes closes pour les dynamiques de Galves-Löcherbach et que le champ moyen à répliques approchait mieux le modèle original que le champ moyen classique dans plusieurs cadres courants.

Dans cet exposé, nous présenterons nos résultats récents issus de Baccelli, Davydov et Taillefumier (2021) prouvant la validité de cette conjecture dans des cadres plus larges que celui du modèle de Galves-Löcherbach. Concrètement, nous introduirons une classe de processus en temps discret, que nous appelons processus d'interaction-agrégation-fragmentation, pour lesquelles nous prouverons la propagation du chaos et l'hypothèse poissonnienne.

1.2 Processus d'interaction-agrégation-fragmentation

Dans les processus d'interaction-agrégation-fragmentation (PIAF), les agents, qui peuvent par exemple représenter des neurones ou des files d'attente, sont les noeuds d'un graphe munis d'un état qui évolue avec le temps. Les noeuds sont couplés via des processus ponctuels qui modélisent des interactions ponctuelles. Spécifiquement, l'état d'un noeud évolue en réponse à son processus ponctuel d'arrivées, et génère un processus de départ qui dépend de l'état. En toute généralité, ce processus peut être vu comme une fonction aléatoire. Pour les processus de la classe des PIAF, cette fonction est définie à travers les dynamiques suivantes:

- le processus de fragmentation est déclenché par des événements d'activation locaux qui ont lieu à chaque noeud et dont la probabilité dépend de l'état du noeud;
- chaque événement de fragmentation déclenche à son tour des interactions entre les noeuds en créant des événements d'arrivées dans les noeuds voisins;
- enfin, le processus d'agrégation consiste en l'intégration des processus d'arrivée à l'état de chaque noeud.

La dynamique associée peut être définie par récurrence à partir des variables aléatoires à valeurs entières $\{X_i\}$ correspondant aux conditions initiales du système et en définissant les variables d'état au temps suivant par

$$Y_i = g_{1,i}(X_i)\, \mathbb{1}_{\{U_i<\sigma_i(X_i)\}} + g_{2,i}(X_i)\, \mathbb{1}_{\{U_i>\sigma_i(X_i)\}} + A_i, \quad \forall i = 1,\ldots,K, \tag{1}$$

où

$$A_i = \sum_{j\neq i} h_{i,j}(X_j)\, \mathbb{1}_{\{U_j<\sigma_j(X_j)\}}, \quad \forall i = 1,\ldots,K, \tag{2}$$

où K est le nombre de noeuds, $\{U_i\}$ sont des variables aléatoires de fragmentation i.i.d. suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ qui sont indépendantes des $\{X_i\}$, pour $i \in \{1,\ldots,K\}$, $\{g_{1,i} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}_{i\in\{1,\ldots,K\}}$ et $\{g_{2,i} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}_{i\in\{1,\ldots,K\}}$ sont des fonctions de fragmentation régissant l'evolution autonome du noeud selon si l'événement de fragmentation se produit ou non, $\{h_{i,j} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}_{i,j\in\{1,\ldots,K\}}$ sont des fonctions d'interaction bornées, et $\{\sigma_i(0), \sigma_i(1), \ldots\}_{i\in\{1,\ldots,K\}}$ vérifiant les conditions $\sigma_i(0) = 0$ et $0 < \sigma_i(1) \leq \sigma_i(2) \leq \cdots \leq 1$ pour tout i sont les probabilités d'activation.

La classe des PIAF ainsi définie inclut plusieurs dynamiques de réseaux présentant un intéret en théorie des files d'attente ou en neurosciences. Ainsi, en prenant $g_{1,i}(k) = k-1, g_{2,i}(k) = k$ et $h_{i,j}(k) = \mathbb{1}_{\{i=j+1 \mod K\}}$, on obtient un réseau de files d'attente de Gordon-Newell (voir Kleinrock (1977)). En prenant $g_{1,i}(k) = 0, g_{2,i}(k) = k$ et $h_{i,j}(k) = \mu_{i,j} \in \mathbb{N}$, on définit un modèle de neurosciences computationnelles qui est une version discrète des modèles de Galves-Löcherbach. Enfin, le choix $g_{1,i}(k) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ et $g_{2,i}(k) = k+1$, correspond aux processus d'agrégation-fragmentation modélisant, par exemple, les réseaux de communication TCP étudiés par Baccelli (2002).

1.3 Champs moyens à répliques et indépendance asymptotique par paires

Les modèles de champs moyens à répliques des PIAF sont définies comme un couplage de répliques du réseau d'intéret par un routage randomisé. Pour un PIAF, l'état de son modèle à M répliques est ainsi spécifié par une collection de variables d'état $X_{m,i}^M$, où m est l'indice de la réplique et i correspond à l'indice du noeud dans le réseau initial. Au lieu d'interagir avec des noeuds dans la même réplique, un noeud activé i dans la réplique m interagit avec un noeud j dans une réplique n choisie aléatoirement uniformément et indépendamment. Cette randomisation préserve des caractéristiques essentielles de la dynamique originale telle que l'amplitude des interactions entre les noeuds mais dégrade la structure de dépendance entre les noeuds.

Effectivement, sur un intervalle de temps fini, la probabilité qu'un noeud particulier reçoive une activation d'un autre noeud est proportionnelle à $1/M$. Ainsi, quand le nombre de répliques augmente, les interactions entre répliques deviennent de plus en plus rares, conduisant intuitivement à l'indépendance entre répliques lorsque $M \to \infty$.

Les variables d'état au temps 1 de la dynamique à M répliques, notées $\{Y_{n,i}^M\}$, sont données par les équations

$$Y_{n,i}^M = g_{1,i}(X_{n,i}^M)\, \mathbb{1}_{\{U_{n,i} < \sigma_i(X_{n,i}^M)\}} + g_{2,i}(X_{n,i}^M)\, \mathbb{1}_{\{U_{n,i} > \sigma_i(X_{n,i}^M)\}} + A_{n,i}^M, \tag{3}$$

où

$$A_{n,i}^M = \sum_{m \neq n} \sum_{j \neq i} h_{i,j}(X_{m,j}^M)\, \mathbb{1}_{\{U_{m,j} < \sigma_i(X_{m,j}^M)\}}\, \mathbb{1}_{\{R_{m,j,i}^M = n\}}, \tag{4}$$

où toutes les notations introduites le sont par analogie avec (1) et (2), et où $\{R_{m,j,i}^M\}$ sont des variables de routage i.i.d. indépendantes de $\{X_{n,i}^M\}$ et $\{U_{n,i}\}$, distribuées uniformément sur $\{1, \ldots, M\} \setminus \{m\}$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, K\}$ et $m \in \{1, \ldots, M\}$. En d'autres termes, si $R_{m,j,i}^M = n$, alors une activation éventuelle du noeud j dans la réplique m à l'étape 0 induit une arrivée de taille $h_{i,j}(X_{m,j}^M)$ au noeud i de la réplique n, et n est choisi uniformément parmi les répliques et indépendamment des variables d'état. Ces variables sont définies indépendamment du fait que l'activation ait lieu ou non. Par ailleurs, pour $i' \neq i$, l'activation en question va induire une arrivée au noeud i' de la réplique n', avec n' échantillonné de la même manière mais indépendamment de n.

Les modèles à répliques sont amenés à devenir tractables dans la limite du nombre infini de répliques. Dans cette limite, l'indépendance asymptotique découle de la plus spécifique hypothèse poissonnienne introduite entre autres par Pirogov (2018). Celle-ci consiste en le fait que les arrivées à des répliques distinctes deviennent asymptotiquement distribuées comme des processus de Poisson (ou Poisson composés). Une telle hypothèse, validée numériquement dans certains réseaux à répliques, a été conjecturée pour des modèles de Galves-Löcherbach en temps continu dans Baccelli (2019). L'objectif ici est donc de prouver la validité de cette hypothèse pour la classe plus large des PIAF, en temps discret. Pour cela, nous montrons que la dynamique en temps discret à M répliques préserve une propriété d'indépendance asymptotique que nous appellons indépendance asymptotique par paires (IAP). Ainsi, nous montrons la validité de l'hypothèse poissonnienne dans la limite du nombre infini de répliques pour tout temps fini sous réserve que les conditions initiales du système vérifient la propriéte d'IAP. Celle-ci s'énonce comme suit : étant donné $M \in \mathbb{N}$, étant donné un tableau de variables aléatoires à valeurs entières $Z = \{Z_{n,i}^M\}_{1\le n\le M, 1\le i\le K}$ telles que pour tout M fixé, les variables aléatoires $Z_{n,i}^M$ sont échangeables en n, on dit que les variables aléatoires $Z_{n,i}^M$ vérfient IAP, ce qu'on note IAP(Z), s'il existe des variables aléatoires à valeurs entières $(\tilde{Z}_i)_{i\in\{1,\ldots,K\}}$ telles que $\forall (n,i) \neq (m,j), \forall u, v \in [0,1]$,

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}[u^{Z_{n,i}^M} v^{Z_{m,j}^M}] = \mathbb{E}[u^{\tilde{Z}_i}]\,\mathbb{E}[v^{\tilde{Z}_j}].$$

Cette propriété implique la convergence en loi des $Z_{n,i}^M$ vers $\tilde{Z}_i$ lorsque $M \to \infty$, la réciproque étant fausse.

1.4 Résultats principaux

Reprenons les notations des équations (3) et (4). En particulier, les variables d'état au temps 0 sont notées sous la forme du tableau $X = \{X_{n,i}^M\}_{1\le n\le M,1\le i\le K}$, et celles au temps 1 $Y = \{Y_{n,i}^M\}_{1\le n\le M,1\le i\le K}$. Alors nous avons les résultats suivants :

- Supposons que IAP(X) soit vérifiée. Alors, quand $M \to \infty$, $A_{n,i}^M \to \tilde{A}_i$ en loi, où $\tilde{A}_i$ suit une loi de Poisson composée et les variables $\tilde{A}_i$ sont indépendantes ;
- IAP(X) implique IAP(Y).

Comme le modèle à M répliques est markovien, ce résultat s'étend par récurrence à tout temps fini.

En exemple d'application, reprenons le modèle de Galves-Löcherbach discret introduit plus haut en posant $g_{1,i}(k) = 0, g_{2,i}(k) = k$ et $h_{i,j}(X_{m,j}^M) = \mu_{i,j}$ avec $\mu_{i,j} \in \mathbb{N}$ (potentiellement zéro). Dans ce cadre, le résultat ci-dessus prouve la propagation du chaos dans le système et la loi du processus d'arrivées limite est caractérisée par, pour $i \in \{1,\ldots,K\}$ et $z \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}\left[z^{\tilde{A}_i}\right] = e^{\theta_i \sum_{j\neq i}\left(z^{\mu_{i,j}}-1\right)} = \prod_{j\neq i} e^{\theta_i\left(z^{\mu_{i,j}}-1\right)},$$

où $\theta_i = \mathbb{E}\left[\sigma_i(\tilde{X}_i)\right]$.

La preuve des résultats repose sur la décomposition de la dynamique en évolution autonome des noeuds et processus d'agrégation des arrivées. Nous montrons d'abord que IAP(X) implique l'indépendance asymptotique par paires de chacun de ces deux processus par une analyse de leurs fonctions génératices des moments, et enfin que la propriété d'indépendance asymptotique par paires passe à la somme dans ce cadre précis.

Bibliographie

Baccelli, F. and Davydov, M. and Taillefumier, T. (2021), Replica-Mean-Field Limits of Fragmentation-Interaction-Aggregation Processes, *Advances in Applied Probability* (à paraitre).

Baccelli, F. and Mcdonald, D. and Reynier, J. (2002), A Mean-Field Model for Multiple TCP Connections through a Buffer Implementing RED, *Performance Evaluation*, 49, pp. 77-97.

Baccelli, F. and Taillefumier, T. (2019), Replica-Mean-Field Limits for Intensity-Based Neural Networks, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 18, pp. 1756-1797.

Kleinrock, L. (1977), Queuing Systems II: Computer Applications.

Masi, A. and Galves, A. and Löcherbach, E. and Presutti, E. (2015), Hydrodynamic Limit for Interacting Neurons, *Journal of Statistical Physics*, 158, pp. 866-902.

Pirogov, S. and Rybko, A. and Shlosman, S. and Vladimirov, A. (2018), Propagation of Chaos and Poisson Hypothesis, *Problems of Information Transmission*, 54, pp. 290-299.

Sznitman, A.S (1989), Topics in propagation of chaos, *Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XIX*, 1464.

Vvedenskaya, N. and Dobrushin R. and Karpelevich, F. (1996), Queueing System with Selection of the Shortest of Two Queues: An Asymptotic Approach, *Probl. Peredachi Inf.*, 32, pp. 20-34.