Asymptotique de la valeur propre principale de l'Hamiltonien d'Anderson continu en dimension $d \leq 3$

Yueh-Sheng Hsu [1] & Cyril Labbé [2]

[1] *Université Paris-Dauphine, PSL University, CNRS, UMR 7534, CEREMADE, 75016 Paris, France. E-mail : hsu@ceremade.dauphine.fr*
[2] *Université de Paris, UFR de Mathématiques et LPSM, 8 place Aurélie Nemours 75013 Paris, France. E-mail : clabbe@lpsm.paris*

Résumé. On considère l'Hamiltonien d'Anderson continu avec pour potentiel le bruit blanc sur la boîte $(-L/2, L/2)^d$ en dimension $d \leq 3$ et l'on déduit l'asymptotique de la première valeur propre lorsque L tend vers l'infini. On montre que les valeurs propres tendent vers $-\infty$ à la vitesse de $(\log L)^{1/(2-d/2)}$ et l'on identifie le préfacteur en fonction de la constante optimale de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. Le résultat était déjà connu en dimensions 1 et 2, mais est nouveau en dimension 3. On présente également deux conjectures sur les fluctuations des valeurs propres et sur les formes asymptotiques des fonctions propres associées près de leurs centres de localisation.

Mots-clés. Hamiltonien d'Anderson ; structures de régularité ; bruit blanc ; opérateur de Schrödinger ; inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Abstract. We consider the continuous Anderson Hamiltonian with white noise potential on $(-L/2, L/2)^d$ in dimension $d \leq 3$, and derive the asymptotic of the smallest eigenvalues when L goes to infinity. We show that these eigenvalues go to $-\infty$ at speed $(\log L)^{1/(2-d/2)}$ and identify the prefactor in terms of the optimal constant of the Gagliardo-Nirenberg inequality. This result was already known in dimensions 1 and 2, but appears to be new in dimension 3. We present some conjectures on the fluctuations of the eigenvalues and on the asymptotic shape of the corresponding eigenfunctions near their localisation centers.

Keywords. Anderson Hamiltonian ; regularity structures ; white noise ; Schrödinger operator ; Gagliardo-Nirenberg inequality.

Ce travail a pour objectif d'étudier le spectre de l'opérateur dit Hamiltonien d'Anderson continu :

$$\mathcal{H}_L := -\Delta + \xi, \quad \text{sur } Q_L :=]-L/2, L/2[^d, \tag{1}$$

où Δ est le Laplacien continu et ξ le bruit blanc en espace.

Le bruit blanc ξ étant une distribution aléatoire p.s. de classe Hölder $\mathcal{C}^\alpha$ avec régularité négative $\alpha = (-d/2)-$, cet opérateur est mal-posé en tant qu'opérateur non-borné à valeurs dans $L^2(\mathbf{R}^d)$: on peut remarquer que son domaine $\mathcal{D}(\mathcal{H}_L)$ ne contient pas les fonctions lisses à supports compacts, car le produit entre une fonction lisse et une distribution est en général seulement une distribution.

En dimension 1, il est possible de définir $\mathcal{H}_L$ en utilisant un argument de l'analyse fonctionnelle standard [1] ; dans ce sens, son spectre, ses fonctions propres ainsi que le phénomène de *localisation d'Anderson* ont été explorés en détails [2, 3, 4]. En revanche, pour $d \in \{2, 3\}$, la notion de multiplication par le bruit blanc n'est plus définie, et une procédure dite de *renormalisation* doit être prise en compte afin de donner un sens à l'opérateur. A cet égard, deux nouvelle théories majeures sont employées respectivement pour construire l'Hamiltonien rigoureusement, qui sont la théorie du calcul paracontrôlé [5] et la théorie des structures de régularité [6]. Jusqu'à présent, très peu d'information a été obtenue sur le spectre de l'Hamiltonien d'Anderson en dimensions 2 et 3.

Ce travail est basé sur la construction présentée dans [7] qui est elle-même établie à l'aide des structures de régularité. Cette construction fournit un opérateur auto-adjoint $\mathcal{H}_L$ sur Q_L avec condition de bord de Dirichlet, possédant un spectre purement discret : $\lambda_{1,L} \leq \lambda_{2,L} \leq \cdots$ avec fonctions propres associées $\varphi_{1,L}, \varphi_{2,L}, \cdots$. Notre résultat principal est que pour $d \leq 3$ et pour tout $n \geq 1$, les valeurs propres tendent vers $-\infty$ de la façon suivante :

$$\lambda_{n,L} \sim -\left(C_d \log L\right)^{2-\frac{d}{2}}, \quad L \to \infty$$

où le facteur C_d est intimement lié au problème variationnel $\sup_{\psi \in H^1 : \|\psi\|_{L}^2 = 1} (\|\psi\|_{L^4}^2 - \|\nabla \psi\|_{L^2}^2)$. Ce dernier admet en fait les mêmes optimiseurs (modulo des scalings) que l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (IGN), ce qui fournit l'expression pour C_d en fonction de κ_d, la constante optimale de l'IGN :

$$C_d = 2d \left(\frac{d}{4}\right)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{4-d}{d}\right)^{2-\frac{d}{2}} \kappa_d^4.$$

Cette asymptotique correspond aux résultats connus en dimension 1 [8, 2] et 2 [9], mais est nouvelle en dimension 3.

Dans cet exposé, nous verrons les arguments clés pour déduire le résultat ci-dessus : on reprend la structure des preuves de [9] mais dans le cadre des structures de régularité et en toute dimension $d \leq 3$. Nous verrons également que l'utilisation des structures de régularité a plusieurs intérêts dans cette étude : premièrement, la théorie permet de construire les objects stochastiques, à savoir les *modèles*, simultanément pour tout $L \geq 1$, nous pourrons donc énoncer les résultats sur un événement de probabilité 1 sans passer par une suite dénombrable de L ; deuxièmement, les preuves pour de nombreuses propriétés utiles sont réduites à des passages à la limite sous renormalisation.

Références

[1] Fukushima, M. et Nakao, S. (1976/77). On spectra of the Schrdinger operator with a white Gaussian noise potential. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 37, no. 3, 267274.

[2] Dumaz, L. et Labbé, C. (2020). Localization of the Continuous Anderson Hamiltonian in 1-d. *Probability Theory and Related Fields*, 176, no. 12, 353419. https ://doi.org/10.1007/s00440-019-00920-6.

[3] Dumaz, L. et Labbé, C. (2021). The Delocalized Phase of the Anderson Hamiltonian in 1-d. ArXiv :2102.05393 [Cond-Mat, Physics :Math-Ph], http ://arxiv.org/abs/2102.05393.

[4] Dumaz, L. et Labbé, C. (2021). Localization Crossover for the Continuous Anderson Hamiltonian in 1-d. ArXiv :2102.09316 [Cond-Mat, Physics :Math-Ph], http ://arxiv.org/abs/2102.09316.

[5] Gubinelli, M., Imkeller, P. et Perkowski, N. (2015). Paracontrolled Distributions and Singular PDEs. *Forum of Mathematics, Pi* 3. https ://doi.org/10.1017/fmp.2015.2.

[6] Hairer, M. (2014). A Theory of Regularity Structures. *Inventiones Mathematicae* 198, no. 2, 269504. https ://doi.org/10.1007/s00222-014-0505-4.

[7] Labbé, C. (2019). The Continuous Anderson Hamiltonian in $d \leq 3$. *Journal of Functional Analysis*, 277, no. 9, 31873235. https ://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.05.027.

[8] McKean, H. P. (1994). A Limit Law for the Ground State of Hills Equation. *Journal of Statistical Physics*, 74, no. 56, 122732. https ://doi.org/10.1007/BF02188225.

[9] Chouk, K. et van Zuijlen, W. (2021) Asymptotics of the Eigenvalues of the Anderson Hamiltonian with White Noise Potential in Two Dimensions. *The Annals of Probability*, 49, no. 4. https ://doi.org/10.1214/20-aop1497.