La repulsion locale des points critiques d'un champ gaussien aléatoire

Soit $\psi = \{\psi(t), t \in \mathbb{R}^2\}$ un champ gaussien stationnaire, isotrope régulier défini sur $\mathbb{R}^2$ et de fonction de covariance quelconque.
On s'intéresse à l'étude géometrique du processus ponctuel donné par les points critiques du champ ψ. Plus précisément, on s'intéresse à la répulsion locale du processus des points critiques, c'est à dire de savoir si les points critiques ont tendance à s'attirer ou se repousser.
Pour quantifier la répulsion, nous étudions l'espérance et le moment d'ordre deux du nombre de points critiques contenu dans une petite boule en différenciant les types de points critiques : extremum, point-selle, minimum, maximum. Pour calculer ces moments, nous utilisons les formules de Rice ou Kac-rice, datant de plus de 60 ans.
On donne une expression exacte pour l'espérance du nombre de points critiques et on montre que les points critiques sont neutres à la répulsion tandis que les points extremaux présentent une forte répulsion.

Mots clés : Champ gaussien; Champ gaussien stationnaire; Points critiques; Kac-Rice formula; Processus ponctuel; répulsion;

The local repulsion of the critical points of a random Gaussian field

Let $\psi = \{\psi(t), t \in \mathbb{R}^2\}$ be an stationary, isotropic Gaussian random field with real values and smooth trajectories.
We are interested in the geometric study of the point process given by the critical points of the ψ field. More precisely, we are interested in the local repulsion of the critical points process, i.e. the critical points tend to attract or repel each other.
To quantify the repulsion, we study the expectation and the moment of order two of the number of critical points in a small ball by differentiating the types of critical points: extremum, saddle-point, minimum, maximum. To calculate these moments, we use the formulas of Rice or Kac-rice, dated back to more than 60 years.
We give an exact expression for the expectation of the number of critical points and we show that the critical points are neutral to the repulsion while the extreme points present a strong repulsion.

Key words: Gaussian random fields; Stationary random fields; Critical points; Kac-Rice formula;

Motivation

Les champs gaussiens sont notoirement la classe de champs aléatoires la plus maniable pour les calculs théoriques et les aspects liés à la simulation ont été étudiés de manière approfondie. Ils sont utilisés pour modéliser des structures ou des phénomènes qui surviennent de façon aléatoire en espace et en temps. La théorie mathématique des champs aléatoires s'applique dans de nombreux domaines tels que l'analyse d'images, l'imagerie médicale ou les sciences de l'environnement. Notre objectif principal est d'étudier la répulsion du processus ponctuel des points critiques d'un champ gaussien lisse.

Pourquoi est-ce intéressant d'étudier la répulsion des points critiques ?

Les propriétés de répulsion des processus ponctuels sont utiles dans un certain nombre d'applications, par exemple en démographie quand on étudie la répartition géographie d'une population ou dans les télécommunications pour modéliser les emplacements des noeuds du réseau.

L'étude des points critiques, leur nombre ainsi que leurs positions est très importante dans divers domaines d'application tels que l'astronomie [2,6], ou la neuroimagerie [7,8].

1. Introduction

Il y a plusieurs questions intéressantes sur les points critiques des champ aléatoires. De notre point de vu, les questions les plus importantes sont celles sur la distribution des points critiques (i.e. leurs positions) et les valeurs critiques correspondantes (i.e. leurs nombres). Plus précisément, on cherche à savoir si les points critiques ont tendance à s'attirer ou se repousser.

Dans notre travail, on s'est concentré sur la propriété de répulsion locale. Plus précisement, on a étudié la répulsion locale de processus de points critiques d'un champ gaussien stationnaire régulier défini sur $\mathbb{R}^2$. On s'est placé dans un contexte générale où la fonction de covariance est quelconque.

Notre étude se base sur le calcul de l'espérance et du moment d'ordre deux du nombre de points critiques contenus dans une petite boule. Pour ce type de calculs, nous utilisons les formules de Kac-rice, présentées dans [1].

Citons deux articles qui s'intéressent à une question semblable [3,4]: est ce que les points critiques sont répulsifs?

Le premier article [4] a été une source d'inspiration. Dans cet article, Belyaev, Cammarota et Wigman ont étudié la répulsion ou l'attraction des points critiques pour un champ gaussien particulier, "Berry's Planar Random Wave Model", dont la fonction de covariance est donnée par une fonction de Bessel. Nous avons utilisé une méthode presque similaire afin d'obtenir une asymptotique quand le rayon de la boule tend vers 0, en effectuant des développements de Taylor sur les espérances conditionnelles impliquées dans les formules de Kac-Rice. Nous avons travaillé avec n'importe quel champ gaussien stationnaire plan. Ils ont montré ni répulsion ni attraction entre les points critiques et une forte répulsion locale surprenante observée entre les minimums et maximums.

En mileu de ma thèse, nous avons pris connaissance de la prépublication d'Azais et Delmas [3] qui étudie l'attraction ou la répulsion des points critiques pour les champs gaussiens stationnaires généraux dans n'importe quelle dimension. En utilisant une méthode de calcul différente, ils obtiennent une borne supérieure pour le second moment factoriel qui est compatible avec l'ordre de grandeur que nous obtenons. Leur méthode est empruntée aux techniques de la théorie des matrices aléatoires, comme suggéré par Fyodorov [5]. En particulier une expression explicite pour la loi de distribution jointe des valeurs propres des matrices gaussiennes est exploitée.

2. Principales hypothèses et principaux outils

Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un champ gaussien de classe C^4 stationnaire et isotrope tel que le vecteur gradient $\nabla\psi(z)$ soit non singulier pour tout $z \in \mathbb{R}^2$. On suppose que ψ est centré et de variance 1. La loi de ψ est determinée par sa fonction de covariance

$$(z, w) \longmapsto \mathbb{E}[\psi(z)\psi(w)], \qquad z, w \in \mathbb{R}^2.$$

Par stationnarité (i.e. sa loi est invariante par translation), on peut écrire

$$\mathbb{E}[\psi(z)\psi(w)] := \sigma(z - w)$$

et par isotropie (i.e. sa loi est invariante par rotation) $\sigma(z - w)$ ne dépend que de $\|z - w\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Le nombre de points critiques de ψ dans une petite boule $\mathcal{B}(\rho)$ de rayon $\rho > 0$ est défini par

$$\mathcal{N}_\rho^c = \#\{x \in \mathcal{B}(\rho) : \nabla\psi(x) = 0\}.$$

De même, on note $\mathcal{N}_\rho^s, \mathcal{N}_\rho^e, \mathcal{N}_\rho^{max}, \mathcal{N}_\rho^{min}$ le nombre des points selles, points extrêmes, maxima et minima respectivement. Notons que $\mathcal{N}_\rho^c = \mathcal{N}_\rho^e + \mathcal{N}_\rho^s$ et $\mathcal{N}_\rho^e = \mathcal{N}_\rho^{max} + \mathcal{N}_\rho^{min}$.
Pour quantifier la répulsion du processus de points critiques, nous calculons l'espérance et le moment factoriel des quantités telles que $\mathcal{N}_\rho^c, \mathcal{N}_\rho^e, \mathcal{N}_\rho^s, \mathcal{N}_\rho^{max}, \mathcal{N}_\rho^{min}$. Ces moments factoriels sont donnés par des formules bien connues datant de plus de 60 ans, les formules de Kac-Rice. Pour formuler nos principaux résultats, nous utilisons la version suivante.

Theorem 2.1. *On suppose que $(\nabla\psi(z_1)\dots,\nabla\psi(z_k))$ est un vecteur gaussien non dégénéré, $\forall z_i \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour $n \geqslant 1$, le moment factoriel d'ordre n de $\mathcal{N}_\rho^c$ est donné par [1],Theorem 11.2.1*

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^c(\mathcal{N}_\rho^c - 1)\dots(\mathcal{N}_\rho^c - (n-1))] = \int\dots\int_{\mathcal{B}(\rho)\times\dots\times\mathcal{B}(\rho)} \mathrm{K}_n(z)\,\mathrm{d}z,$$

où $z = (z_1\dots,z_n) \in \mathcal{B}(\rho)\times\dots\times\mathcal{B}(\rho) \subset \mathbb{R}^{2n}$ et K_n est la fonction de corrélation à n-points

$$\mathrm{K}_n(z) = \phi_{(\nabla\psi(z_1),\dots,\nabla\psi(z_n))}(0,\dots,0)\times$$
$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n |\det H_\psi(z_i)| \;\middle|\; \nabla\psi(z_1) = \dots = \nabla\psi(z_n) = 0\right],$$

où $\phi_{(\nabla\psi(z_1),\dots,\nabla\psi(z_n))}(0,\dots,0)$ est la fonction de densité du vecteur gaussien $(\nabla\psi(z_1),\dots,\nabla\psi(z_n))$ évalué en $(0,\dots,0)$ et $H_\psi(z_i)$ est la matrice hessienne de ψ au point z_i.

3. Résultats

Le premier résultat concerne l'espérance.

Proposition 3.1. *Soit ψ un champ gaussien $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses du théorème 2.1. On introduit $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall z \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}[\psi(z)\psi(0)] = \Gamma(\|z\|^2)$ et on note les quatre premières dérivées de Γ au point $0 \in \mathbb{R}$ par $\Gamma'(0) = \eta$, $\Gamma''(0) = \mu$, $\Gamma^{(3)}(0) = \nu$ et $\Gamma^{(4)}(0) = \upsilon$. Alors, pour tout $\rho > 0$, on a*

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^e] = \frac{\rho^2}{|\eta|}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{8\mu+1}} + 2\mu) \quad et \quad \mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^s] = \frac{\rho^2}{2\,|\eta|}\,\frac{1}{\sqrt{8\mu+1}}, \tag{1}$$

et

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^{min}] = \mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^{max}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^e]. \tag{2}$$

Le théorème suivant est le résultat principal.

Theorem 3.1. *Soit ψ un champ gaussien $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses du théorème 2.1. Quand $\rho \to 0$, on a l'équivalent suivant pour le second moment factoriel du nombre de points critiques de ψ dans une boule de rayon ρ*

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^c(\mathcal{N}_\rho^c - 1)] \sim a_c \times \rho^4. \tag{3}$$

De plus, pour les nombres d'extrema et de points- selles, on a

$$a'_e\,\rho^7 \leqslant \mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^e(\mathcal{N}_\rho^e - 1)] \leqslant a_e\,\rho^7 \quad et \quad a'_s\,\rho^7 \leqslant \mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^s(\mathcal{N}_\rho^s - 1)] \leqslant a_s\,\rho^7, \tag{4}$$

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_\rho^e\mathcal{N}_\rho^s] \sim a_{e,s}\,\rho^4 \tag{5}$$

où $a_c, a_e, a'_e, a_s, a'_s, a_{e,s}$ sont des constantes positives.

References

[1] Robert J Adler, Jonathan E Taylor, et al. *Random fields and geometry*, volume 80. Springer, 2007.

[2] Robert J Adler, Jonathan E Taylor, Keith J Worsley, and Keith Worsley. Applications of random fields and geometry: Foundations and case studies. 2007.

[3] Jean-Marc Azais and Céline Delmas. Mean number and correlation function of critical points of isotropic gaussian fields and some results on goe random matrices. *arXiv preprint arXiv:1911.02300*, 2019.

[4] Dmitry Beliaev, Valentina Cammarota, and Igor Wigman. Two point function for critical points of a random plane wave. *International Mathematics Research Notices*, 2019(9):2661–2689, 2019.

[5] Yan V Fyodorov. Complexity of random energy landscapes, glass transition, and absolute value of the spectral determinant of random matrices. *Physical review letters*, 92(24):240601, 2004.

[6] Georg Lindgren. Local maxima of gaussian fields. *Arkiv för matematik*, 10(1):195–218, 1972.

[7] Thomas Nichols and Satoru Hayasaka. Controlling the familywise error rate in functional neuroimaging: a comparative review. *Statistical methods in medical research*, 12(5):419–446, 2003.

[8] Keith J Worsley, S Marrett, P Neelin, and AC Evans. Searching scale space for activation in pet images. *Human brain mapping*, 4(1):74–90, 1996.