

DYNAMIQUES DE NEURONES ET PROCESSUS DE HAWKES AVEC INTERACTION SPATIALE SUR DES GRAPHS ALÉATOIRES

Zoé Agathe-Nerine ¹ & Eric Luçon ² & Ellen Saada ³

¹ zoe.agathe-nerine@u-paris.fr ² lucon.eric@gmail.com ³ ellen.saada@mi.parisdescartes.fr

Résumé. On considère ainsi une population de N neurones en interaction, modélisée par un processus de Hawkes multivarié : chaque neurone s’excite avec une intensité qui dépend du passé des neurones lui étant connectés. L’interaction entre les neurones se fait selon la réalisation d’un graphe aléatoire, où la probabilité de présence de chaque arête dépend de la position spatiale des neurones concernés. Nous étudions le comportement limite de ce modèle en grande population, et nous regardons comment l’inhomogénéité spatiale des interactions influence le comportement en temps long du système.

Mots-clés. Processus de Hawkes multivarié, couplage, systèmes de particules en interaction spatiale, graphes aléatoires, convergence de graphes

Abstract. We consider a population of N interacting neurons, represented by a multivariate Hawkes process : the firing rate of each neuron depends on the history of the connected neurons. Contrary to the mean-field framework where the interaction occurs on the complete graph, the connectivity between particles is given by a random possibly diluted and inhomogeneous graphs where the probability of presence of each edge depends on the spatial position of its vertices. We address the well-posedness of this system and the behaviour as $N \rightarrow \infty$. A crucial issue will be to understand how spatial inhomogeneity influences the large time behaviour of the system.

Keywords. multivariate Hawkes processes, coupling, spatially interacting particle systems, random graphs, graph convergence

1 Un système de N neurones en interaction sur un graphe aléatoire

1.1 Contexte biologique

Les neurones sont les constituants élémentaires du système nerveux, comme cellules spécialisées dans la réception, l’intégration et la transmission d’informations. Lorsqu’un neurone reçoit de l’information, si celle ci est suffisante le neurone réagit selon une loi de tout ou rien en produisant un potentiel d’action dit spike, lui même transmis jusqu’aux neurones avec qui ce neurone communique et déclenchant potentiellement d’autres spikes.

1.2 Modèle

Comme les potentiels d'actions sont brefs et stéréotypés, l'information est uniquement codée dans les temps inter spikes, et chaque neurone est modélisé par un processus ponctuel représentant ses instants d'excitation. Pour modéliser les instants de saut, nous utilisons la notion d'intensité d'un processus de saut : l'apparition d'un spike est vu comme un phénomène aléatoire qui dépend de l'état du neurone. Il aura tendance à émettre un spike selon une certaine intensité liée à l'activité passée du système. On s'intéresse ainsi à un processus de Hawkes multivarié. Pour modéliser l'interaction du système, nous associons à chaque neurone une position dans l'espace, et créons un graphe aléatoire dont la probabilité de présence d'un lien entre deux neurones dépend de leurs positions respectives à travers un noyau W_N .

Formellement, pour modéliser un système de N neurones en interaction, nous considérons que le i ème neurone est situé en une position $x_i^{(N)} \in I \subset \mathbb{R}^d$ et que son comportement est caractérisé par le processus de comptage $\left(Z_i^{(N)}(t)\right)_{t \geq 0}$, c'est-à-dire que $Z_i^{(N)}(t)$ compte le nombre de sauts du i ème neurone pendant l'intervalle $[0, t]$. Ces sauts arrivent selon une intensité stochastique $\lambda_i^{(N)}(t)$ qui dépend de l'activité passée de l'ensemble du système :

$$\lambda_i^{(N)}(t) = f \left(u_0(t, x_i) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(N)} \int_0^{t-} h(t-s) dZ_j^{(N)}(s) \right), \quad (1)$$

dans le sens où

$$\mathbf{P} \left(Z_i^{(N)} \text{ saute une fois dans }]t, t + dt] | \mathcal{F}_t \right) = \lambda_i^{(N)}(t) dt,$$

avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ représentant l'interaction synaptique, $u_0 : \mathbb{R}_+ \times I \rightarrow \mathbb{R}$ l'activité propre du neurone, $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de mémoire (comment un saut passé continue d'influencer l'intensité actuelle) et $w_{ij}^{(N)}$ représentant l'influence du j ème neurone sur le i ème. Cette interaction dépend de la réalisation d'un graphe aléatoire, avec $w_{ij}^{(N)} = \kappa_i^{(N)} \xi_{ij}^{(N)}$ où $\xi_{ij}^{(N)}$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $W_N(x_i, x_j)$ et $\kappa_i^{(N)}$ est un paramètre de dilution.

Ce processus de Hawkes multivarié $\left(Z_1^{(N)}(t), \dots, Z_N^{(N)}(t)\right)_{t \geq 0}$ est une extension du modèle présenté par Chevallier et al. (2019), et la structure du graphe sous-jacent reprend le travail de Luçon (2020).

2 Comportement limite

2.1 Limite en grande population

Nous étudions le comportement en grande population de ce processus sur un intervalle de temps fini $[0, T]$. Sous réserve que la mesure empirique $\nu^{(N)}$ des positions $(x_1^{(N)}, \dots, x_N^{(N)})$ converge vers ν loi sur I et que le graphe d'interaction converge au sens des graphons vers $W : I \times I \rightarrow \mathbf{R}_+$, nous montrons que ce système peut être approché en grande population par un système de processus de Poisson inhomogènes dépendant de la position x du neurone d'intensité solution de

$$\lambda(t, x) = f \left(u_0(t, x) + \int_I \int_0^{t-} W(x, y) h(t-s) \lambda(s, y) ds \nu(dy) \right). \quad (2)$$

Plus précisément, pour étudier cette convergence nous introduisons un couplage entre le processus multivarié $(Z_1^{(N)}(t), \dots, Z_N^{(N)}(t))_{t \geq 0}$ et le processus limite $(\bar{Z}_1(t), \dots, \bar{Z}_N(t))_{t \geq 0}$ (aux mêmes positions) en élaguant une même famille de mesures de Poisson indépendantes par les intensités (1) et (2).

Nous montrons que la mesure empirique du processus $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(Z_i^{(N)}(\cdot), x_i^{(N)})}$ converge vers une mesure limite $\mu_\infty(d\eta, dx) := P_{[0, T], \infty}(d\eta | x) \nu(dx)$ où $P_{[0, T], \infty}(\cdot | x)$ est la loi d'un processus de Poisson inhomogène d'intensité $\lambda(\cdot, x)$ définie en (2).

2.2 Limite en temps long

Dans le cadre linéaire (avec $f = Id$), nous étudions la limite en temps long de la solution à l'équation (2). Sous réserve que l'activité propre u_0 converge en temps long uniformément en espace vers une fonction $u : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ et sous des hypothèses de régularité sur les fonctions paramètres, nous montrons qu'il existe une transition de phase quantifiée notamment par le rayon spectral r_∞ de l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} T_W : L^\infty(I) &\longrightarrow L^\infty(I) \\ g &\longmapsto (Tg : x \longmapsto \int_I W(x, y) g(y) \nu(dy)). \end{aligned} \quad (3)$$

Dans le cas sous critique ($\|h\|_1 r_\infty < 1$), l'intensité limite d'un neurone situé en x en temps long est solution de l'équation $\ell(x) = u(x) + \|h\|_1 \int_I W(x, y) \ell(y) \nu(dy)$. Un résultat intéressant est que lorsque u est constante, cette fonction ℓ est constante également si et seulement le degré rentrant $x \mapsto D(x) = \int_I W(x, y) \nu(dy)$ du graphon est constant.

2.3 Quelques exemples

Les simulations suivantes illustrent les résultats dans le cadre linéaire sous critique, avec une fonction de mémoire $h(t) = e^{-2\alpha t}$ et une activité propre constante égale à 1 partout sur le domaine spatial $I = [0, 1]$, où les particules sont régulièrement réparties ($x_i^{(N)} = \frac{i}{N}$).

Sur la Figure 1, l'interaction est sur un graphe d'Erdős Rényi où chaque connection se fait indépendamment avec probabilité 0.5 ($W = W_N = 0.5$), le degré du graphe est donc constant et le comportement en temps long ne dépend pas de la position spatiale, comme on le voit sur l'intensité de deux particules situées à positions différentes. Sur la Figure 2, l'interaction se fait selon un noyau $W_N(x, y) = xy$ de degré non constant, et le comportement en temps long dépend bien de la position des particules.

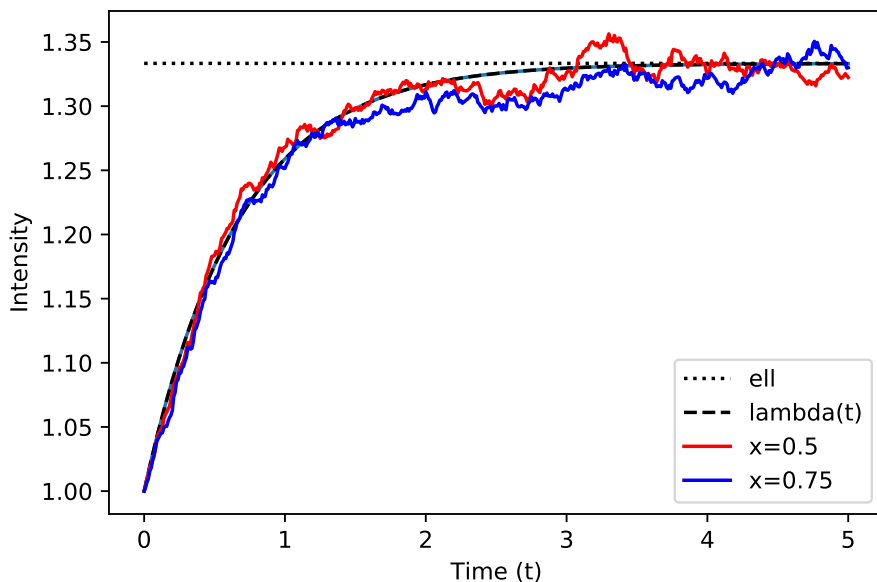


Figure 1: Simulation du processus pour $N = 1000$ neurones sur un graphe d'Erdős Rényi

Bibliographie

- Lovász, L. (2012). *Large networks and graph limits, volume 60*. American Mathematical Soc.
- Chevallier, J., Duarte, A., Löcherbach, E., and Ost, G. (2019). *Mean field limits for non-linear spatially extended Hawkes processes with exponential memory kernels*. *Stochastic Processes and their Applications*, 129(1):1 – 27.
- Delattre, S., Fournier, N., and Hoffmann, M. (2016). *Hawkes processes on large networks*. *Ann. Appl. Probab.*, 26(1):216–261.
- Luçon, E. (2020). *Quenched asymptotics for interacting diffusions on inhomogeneous random graphs*. *Stochastic Processes and their Applications*, 130(11):6783-6842.
- Agathe-Nerine, Z. (2021). *Multivariate Hawkes processes on inhomogeneous random graphs*. Preprint Arxiv 2106.12259

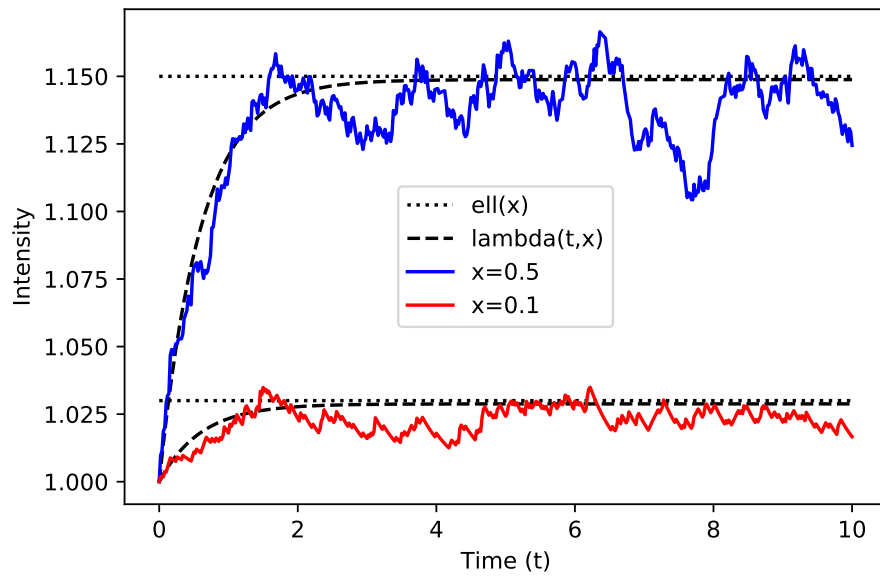


Figure 2: Simulation du processus pour $N = 500$ neurones sur un graphe inhomogène dit "Expected Degree Distribution"